ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки
Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-717-725
УДК 517.977

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕУПРЕЖДАЮЩЕГО СЕЛЕКТОРА НЕУПРЕЖДАЮЩЕГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

© **Д. А. Серков**[1,2], **А. Г. Ченцов**[1,2]

[1] ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук»
62990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
[2] ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: chentsov@imm.uran.ru, serkov@imm.uran.ru

Аннотация. В работе изучаются условия, при которых многозначное отображение имеет неупреждающий селектор: в случае неупредаемости, порожденной линейно упорядоченным по включению семейством, показано, что у многозначного неупреждающего отображения со свойствами непустоты и компактности множеств–значений существует неупреждающий (однозначный) селектор.
Ключевые слова: многозначное отображение; неупреждающий селектор

Введение

Свойство неупреждаемости играет важную роль в теории дифференциальных игр в связи с построением идеализированных разрешающих стратегий. В ранних работах идеализированные стратегии — квазистратегии — определялись в виде операторов на функциональных пространствах управлений или траекторий со свойством физической осуществимости или неупреждаемости (см. [1–4] и др.). С другой стороны, в некоторых конструкциях, приводящих к неподвижным точкам операторов программного поглощения [5], естественным образом возникают неупреждающие многозначные отображения (МО) и, как следствие, многозначные квазистратегии. Вопрос о селекции МО с сохранением свойства неупреждаемости для отображений на пространствах обобщенных управлений рассматривался в [6], где существенно использовалась специфика управлений–мер.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00410).

В настоящей работе изучается вариант достаточно общей постановки такого рода: в случае неупреждаемости, порожденной линейно упорядоченным по включению семейством, показано, что неупреждающее МО со свойствами непустозначности и компактности множеств–значений имеет (однозначный) неупреждающий селектор.

1. Определения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки, $\varnothing$ — пустое множество); $\triangleq$ — равенство по определению. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого — множества.

Пусть $X \neq \varnothing$ и $\leqslant \in \mathcal{P}(X \times X)$ — отношение (нестрогого) частичного порядка на X. Назовем пару $(X, \leqslant)$ *частично упорядоченным множеством* (ЧУМ). Всякое линейно упорядоченное подмножество ЧУМ назовем *цепью.*

Фиксируем непустые множества T, X и Y, а также непустые множества $\mathcal{T} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(T))$, $\Omega \in \mathcal{P}'(Y^T)$ и $Z \in \mathcal{P}'(X^T)$.

Определим неупреждаемость элементов $\alpha \in \mathcal{P}(Z)^\Omega$, $\beta \in Z^\Omega$ в виде требований, соответственно:

$$((\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A)) \Rightarrow \big(\big(\alpha(\omega_1) \,|\, A\big) = \big(\alpha(\omega_2) \,|\, A\big)\big) \qquad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega, \forall A \in \mathcal{T}, \tag{1}$$

$$((\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A)) \Rightarrow ((\beta(\omega_1) \,|\, A) = (\beta(\omega_2) \,|\, A)) \qquad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega, \forall A \in \mathcal{T}. \tag{2}$$

Обозначим $\mathbf{N}$ подмножество всех неупреждающих МО из $\mathcal{P}(Z)^\Omega$.

Пусть $H \in \mathcal{P}(\Omega)$ и $\alpha \in \mathcal{P}(Z)^\Omega$. Определим подмножества из Z^Ω:

$$\mathbf{n}^0_H \triangleq \{f \in Z^\Omega \mid \forall \omega, \omega' \in H \, \forall A \in \mathcal{T} \, ((\omega \,|\, A) = (\omega' \,|\, A)) \Rightarrow ((f(\omega) \,|\, A) = (f(\omega') \,|\, A))\}, \tag{3}$$

$$\mathbf{n}^0_H[\alpha] \triangleq \left(\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega) \right) \bigcap \mathbf{n}^0_H. \tag{4}$$

Иными словами, $\mathbf{n}^0_H$ — множество всех неупреждающих на H отображений из Z^Ω, в (4) определяются (однозначные) неупреждающие на H селекторы заданного МО α и, наконец, $\mathbf{n}^0_\Omega[\alpha]$ есть множество всех неупреждающих селекторов МО α. Заметим, что в приложениях семейство $\mathcal{T}$, как правило, предполагается линейно упорядоченным в ЧУМ $(\mathcal{P}(T), \subset)$.

Пусть на множестве X введена топология τ_X. Полагаем тогда, что множество $Z \in \mathcal{P}'(X^T)$ оснащено топологией τ_Z, индуцированной топологией Тихонова $\otimes^T(\tau_X)$ на произведении $\prod_{t \in T} X$. Аналогично, используя τ_Z, вводим на множестве Z^Ω топологию Тихонова τ_{Z^Ω}: $\tau_{Z^\Omega} \triangleq \otimes^\Omega(\tau_Z)$.

2. Основные результаты

Лемма 1. *Пусть τ_X — T_2-топология, $\beta \in \mathcal{P}(Z)^\Omega$ и для всякого $\omega \in \Omega$ значение $\beta(\omega)$ не пусто и компактно в (Z, τ_Z). Тогда при любом $H \subset \Omega$ множество $\mathbf{n}^0_H[\beta]$ компактно в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем и зафиксируем $\beta \in \mathcal{P}'(Z)^{\Omega}$, удовлетворяющее условиям леммы. Выберем произвольно $H \subset \Omega$.

1. По теореме Тихонова [7, Теорема 3.2.4] в силу непустоты и компактности $\beta(\omega)$ при любом $\omega \in \Omega$ множество $\prod_{\omega\in\Omega}\beta(\omega)$ компактно в $(Z^{\Omega}, \tau_{Z^{\Omega}})$. Таким образом, с учетом (4) для доказательства утверждения достаточно установить замкнутость множества $\mathbf{n}^0_H$ в $(Z^{\Omega}, \tau_{Z^{\Omega}})$. С этой целью покажем, что множество $Z^{\Omega} \setminus \mathbf{n}^0_H$ открыто в пространстве $(Z^{\Omega}, \tau_{Z^{\Omega}})$.

2. Если $Z^{\Omega} = \mathbf{n}^0_H$, то утверждение очевидно. Пусть $\bar{\alpha} \in Z^{\Omega} \setminus \mathbf{n}^0_H$. Тогда существуют $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ и $A \in \mathcal{P}'(T)$ такие, что

$$(A \in \mathcal{T})\&(\omega_1, \omega_2 \in H)\&((\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A))\&((\bar{\alpha}(\omega_1) \,|\, A) \neq (\bar{\alpha}(\omega_2) \,|\, A)). \tag{5}$$

Обозначим для краткости $h_1 \triangleq \bar{\alpha}(\omega_1)$, $h_2 \triangleq \bar{\alpha}(\omega_2)$. Так как $(h_1 \,|\, A) \neq (h_2 \,|\, A)$, $h_1, h_2 \in Z$ существует $\xi \in A$ такой, что $h_1(\xi) \neq h_2(\xi)$. Тогда, так как (X, τ_X) есть T_2-пространство, существуют $O_{X1}, O_{X2} \in \tau_X$ такие, что $h_1(\xi) \in O_{X1}$, $h_2(\xi) \in O_{X2}$ и

$$O_{X1} \cap O_{X2} = \varnothing. \tag{6}$$

Определим множества $O_{Z1}, O_{Z2} \in \mathcal{P}(Z)$ вида

$$O_{Z1} \triangleq \{h \in Z \mid h(\xi) \in O_{X1}\}, \qquad O_{Z2} \triangleq \{h \in Z \mid h(\xi) \in O_{X2}\}. \tag{7}$$

Из определений следует, что $O_{Z1}, O_{Z2} \in \tau_Z$, $h_1 \in O_{Z1}$, $h_2 \in O_{Z2}$. Определим теперь множество $O_{Z^{\Omega}} \in \mathcal{P}(Z^{\Omega})$ вида

$$O_{Z^{\Omega}} \triangleq \{\delta \in Z^{\Omega} \mid (\delta(\omega_1) \in O_{Z1})\&(\delta(\omega_2) \in O_{Z2})\}. \tag{8}$$

Заметим, что из $h_1 \neq h_2$ следует неравенство $\omega_1 \neq \omega_2$, а значит определение (8) корректно. По построению имеем

$$\bar{\alpha} \in O_{Z^{\Omega}} \in \tau_{Z^{\Omega}}. \tag{9}$$

Проверим, что кроме того выполняется равенство $O_{Z^{\Omega}} \cap \mathbf{n}^0_H = \varnothing$. Предположим противное: нашлось $\gamma \in O_{Z^{\Omega}}$ такое, что

$$\gamma \in \mathbf{n}^0_H. \tag{10}$$

Из включения $\gamma \in O_{Z^{\Omega}}$ получаем (см. (8)) $\gamma(\omega_1) \in O_{Z1}$, $\gamma(\omega_2) \in O_{Z2}$. Следовательно (см. (7)), выполнены включения $\gamma(\omega_1)(\xi) \in O_{X1}$, $\gamma(\omega_2)(\xi) \in O_{X2}$. Значит (см. (6)), выполняется неравенство $\gamma(\omega_1)(\xi) \neq \gamma(\omega_2)(\xi)$, из которого в силу $\xi \in A$ следует неравенство $(\gamma(\omega_1) \,|\, A) \neq (\gamma(\omega_2) \,|\, A)$, противоречащее (10). В самом деле, по выбору ω_1, ω_2 имеем (см. (5)) $\omega_1, \omega_2 \in H$ и $(\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A)$, а тогда из (10) должно следовать (см. (3)) равенство $(\gamma(\omega_1) \,|\, A) = (\gamma(\omega_2) \,|\, A)$. Итак, выполняется $O_{Z^{\Omega}} \cap \mathbf{n}^0_H = \varnothing$ и, следовательно (см. (9)), в силу произвольного выбора $\bar{\alpha}$ множество $Z^{\Omega} \setminus \mathbf{n}^0_H$ является открытым в $(Z^{\Omega}, \tau_{Z^{\Omega}})$.

Таким образом, установлено, что множество $\mathbf{n}^0_H$ замкнуто в $(Z^{\Omega}, \tau_{Z^{\Omega}})$. Этим завершается доказательство.

Теорема 1. *Пусть* τ_X *—* T_2*-топология,* $\mathcal{T}$ *— цепь в ЧУМ* $(\mathcal{P}(T), \subset)$*. Пусть* $\alpha \in \mathbf{N}$ *таково, что для всякого* $\omega \in \Omega$ *значение* $\alpha(\omega)$ *не пусто и компактно в* (Z, τ_Z)*. Тогда* $\mathbf{n}^0_\Omega[\alpha]$ *— непустой компакт в* $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$*.*

Теорема, в частности, утверждает (см. (3), (4)), что всякое МО, удовлетворяющее указанным требованиям, обладает (однозначным) неупреждающим селектором.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем и зафиксируем $\alpha \in \mathbf{N}$, удовлетворяющее условиям леммы. Определим семейство $\mathcal{H}_\alpha \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\Omega))$ в виде $\mathcal{H}_\alpha \triangleq \{H \in \mathcal{P}'(\Omega) \mid \mathbf{n}^0_H[\alpha] \neq \varnothing\}$. Отметим, что это семейство не пусто, так как синглетоны Ω, очевидно, содержатся в нем. Схема доказательства утверждения следующая: сначала мы покажем, пользуясь леммой Цорна, что в $\mathcal{H}_\alpha$ существует максимальный элемент, а затем убедимся, что он совпадает с Ω.

1. Пусть $(H_s)_{s\in S}$ некоторая цепь в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \subset)$. Положим $\bar{H} \triangleq \cup_{s\in S} H_s$ и проверим, что $\bar{H} \in \mathcal{H}_\alpha$. Из условий, наложенных на α, следует, что при всяком $s \in S$ для α и H_s выполняются условия леммы 1. Следовательно, при всяком $s \in S$ множество $\mathbf{n}^0_{H_s}[\alpha]$ компактно в пространстве $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$. Из хаусдорфовости топологии τ_X и определения топологии τ_{Z^Ω} следует, что τ_{Z^Ω} есть T_2 топология и, следовательно, всякое компактное в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$ множество замкнуто. То есть $(H_s)_{s\in S}$ — семейство замкнутых множеств в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$. Кроме того, так как $(H_s)_{s\in S}$ — цепь, то (см. (4)) семейство $(\mathbf{n}^0_{H_s}[\alpha])_{s\in S}$, также образует цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}'(Z^\Omega), \subset)$. В частности, это семейство центрировано. В силу теоремы Тихонова [7, Теорема 3.2.4] из непустоты и компактности $\alpha(\omega)$ при любом $\omega \in \Omega$ следует компактность в пространстве $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$ множества $\prod_{\omega\in\Omega} \alpha(\omega)$, содержащего (см. (4)) все множества семейства $(\mathbf{n}^0_{H_s}[\alpha])_{s\in S}$. Следовательно, $\cap_{s\in S} \mathbf{n}^0_{H_s}[\alpha] \neq \varnothing$.

Покажем, что $\cap_{s\in S} \mathbf{n}^0_{H_s}[\alpha] \subset \mathbf{n}^0_{\bar{H}}[\alpha]$, то есть $\bar{H} \in \mathcal{H}_\alpha$. Пусть $\beta \in \cap_{s\in S} \mathbf{n}^0_{H_s}[\alpha]$, $A \in \mathcal{T}$, $\omega_1, \omega_2 \in \bar{H}$ и

$$(\omega_1 \mid A) = (\omega_2 \mid A). \tag{11}$$

Так как $\bar{H}$ есть объединение элементов цепи $(H_s)_{s\in S}$, найдется индекс $\bar{s} \in S$ такой, что $\omega_1, \omega_2 \in H_{\bar{s}}$. Из выбора β имеем соотношения

$$\beta \in \bigcap_{s\in S} \mathbf{n}^0_{H_s}[\alpha] \subset \mathbf{n}^0_{H_{\bar{s}}}[\alpha].$$

Из (11), (4) и последнего выражения получаем $(\beta(\omega_1) \mid A) = (\beta(\omega_2) \mid A)$. С учетом произвольного выбора ω_1, ω_2 имеем (см. (4)) $\beta \in \mathbf{n}^0_{\bar{H}}[\alpha]$. Так как β выбиралась произвольно, получим вложение $\cap_{s\in S} \mathbf{n}^0_{H_s}[\alpha] \subset \mathbf{n}^0_\alpha[\bar{H}]$, а значит и включение $\bar{H} \in \mathcal{H}_\alpha$. Принимая во внимание вложения $H_s \subset \bar{H}$, очевидно, справедливые при всех $s \in S$, заключаем, что $\bar{H}$ есть верхняя грань $(H_s)_{s\in S}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \subset)$. Так как цепь $(H_s)_{s\in S}$ выбиралась произвольно, мы можем воспользоваться леммой Цорна: обозначим $\hat{H}$ произвольно выбранный максимальный элемент в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \subset)$.

2. Покажем, что $\hat{H} = \Omega$. Предположим противное: существует $\hat{\omega} \in \Omega \setminus \hat{H}$. Положим

$$\mathtt{A} \triangleq \{B \in \mathcal{T} \mid \exists \omega \in \hat{H} : (\omega \mid B) = (\hat{\omega} \mid B)\}. \tag{12}$$

Возможны два взаимоисключающих случая:

a. $\mathtt{A} = \varnothing$

b. $\mathtt{A} \neq \varnothing$

Выберем произвольно $\beta \in \mathbf{n}^0_{\hat{H}}[\alpha]$ и покажем, что в каждом из этих случаев, изменив значение функции β разве что для аргумента $\hat{\omega}$, можно получить новую функцию $\hat{\beta}$, удовлетворяющую включению

$$\hat{\beta} \in \mathbf{n}^0_{\hat{H}\cup\{\hat{\omega}\}}[\alpha], \tag{13}$$

которое означает, что $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\} \in \mathcal{H}_\alpha$ и, следовательно, противоречит свойству максимальности элемента $\hat{H}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \subset)$.

Случай a. Так как в этом случае посылка условия неупреждаемости (см. (2)) выполняется лишь когда $\omega_1, \omega_2 \in \hat{H}$ или $\omega_1 = \omega_2 = \hat{\omega}$, то уже сама функция β, очевидно, удовлетворяет включению (13).

Случай b. Напомним, что по условию теоремы $\mathcal{T}$ — цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}(T), \subset)$. Следовательно, всякое подсемейство из $\mathcal{T}$ также есть цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}(T), \subset)$.

Определим отображение $\{\xi_B\}_{B\in\mathtt{A}} \in \alpha(\hat{\omega})^{\mathtt{A}}$ следующим образом:

— для всякого $B \in \mathtt{A}$ выберем (см. (12)) произвольно $\omega_B \in \hat{H}$, удовлетворяющую $(\omega_B \,|\, B) = (\hat{\omega} \,|\, B)$;

— в силу условия неупреждаемости (см. (1)) имеем равенство $\big(\alpha(\hat{\omega}) \,|\, B\big) = \big(\alpha(\omega_B) \,|\, B\big)$; кроме того, по выбору β выполняется включение $\beta(\omega_B) \in \alpha(\omega_B)$; значит, пользуясь аксомой выбора, можно назначить $\xi_B \in Z$, удовлетворяющий требованию

$$(\xi_B \in \alpha(\hat{\omega}))\&((\xi_B \,|\, B) = (\beta(\omega_B) \,|\, B)) \qquad \forall B \in \mathtt{A}. \tag{14}$$

Итак, для всякого $B \in \mathtt{A}$ мы определили $\xi_B \in \alpha(\hat{\omega})$. Напомним, что как подсемейство цепи $\mathcal{T}$, семейство $\mathtt{A}$ образует цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}(T), \subset)$. Таким образом, отображение $\{\xi_B\}_{B\in\mathtt{A}}$ можно рассматривать как направленность, определенную на $\mathtt{A}$ со значениями в $\alpha(\hat{\omega})$. По условию теоремы $\alpha(\hat{\omega})$ — компактное множество в топологическом пространстве $(Z, \boldsymbol{\tau}_Z)$, следовательно, существует предельная точка $\hat{\xi} \in \alpha(\hat{\omega})$ направленности $\{\xi_B\}_{B\in\mathtt{A}}$: для любых $B \in \mathtt{A}$, $\hat{O} \in \boldsymbol{\tau}_Z$, $\hat{\xi} \in \hat{O}$ найдется $B' \in \mathtt{A}$ такое, что

$$(B \subset B')\&(\xi_{B'} \in \hat{O}). \tag{15}$$

Используя элемент $\hat{\xi}$, переопределим функцию β:

$$\hat{\beta}(\zeta) \triangleq \begin{cases} \beta(\zeta), & \zeta \neq \hat{\omega}, \\ \hat{\xi}, & \zeta = \hat{\omega}, \end{cases} \qquad \zeta \in \Omega. \tag{16}$$

Так как $\hat{\omega} \notin \hat{H}$ функция $\hat{\beta}$ наследует (см. (16)) неупреждаемость β на множестве $\hat{H}$:

$$\hat{\beta} \in \mathbf{n}^0_{\hat{H}}[\alpha]. \tag{17}$$

Воспользуемся этим и проверим неупреждаемость $\hat{\beta}$ на множестве $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$.

Выберем произвольно и зафиксируем $\zeta_1, \zeta_2 \in \hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$ и $E \in \mathcal{T}$, для которых выполняется равенство

$$(\zeta_1 \,|\, E) = (\zeta_2 \,|\, E). \tag{18}$$

Опустим для краткости два простейших (с учетом (17)) случая ($\zeta_1, \zeta_2 \in \hat{H}$ или $\zeta_1 = \zeta_2 = \hat{\omega}$) и рассмотрим один с точностью до обозначений оставшийся вариант:

$$(\zeta_1 \in \hat{H})\&(\zeta_2 = \hat{\omega}). \tag{19}$$

Из (18), (19) вытекает

$$(\zeta_1 \,|\, E) = (\hat{\omega} \,|\, E) \tag{20}$$

и по определению $\mathtt{A}$ (см. (12)) имеем включение $E \in \mathtt{A}$.

Покажем, что для всякого $t \in E$ направленность $\{\xi_B(t)\}_{B\in\mathtt{A}}$ стационарна не позже (в смысле порядка на ЧУМ $(\mathcal{P}(T), \subset)$), чем с элемента $\xi_E(t)$. В самом деле, пусть $F \in \mathtt{A}$ и $E \subset F$. Тогда в силу определений для элементов $\omega_E, \omega_F \in \hat{H}$ верны равенства $(\hat{\omega} \,|\, E) = (\omega_E \,|\, E)$, $(\omega_F \,|\, F) = (\hat{\omega} \,|\, F)$ и, стало быть, равенство

$$(\omega_F \,|\, E) = (\omega_E \,|\, E). \tag{21}$$

Из (14), (17) и (21) получаем

$$(\xi_F \,|\, E) = (\beta(\omega_F) \,|\, E) = (\beta(\omega_E) \,|\, E) = (\xi_E \,|\, E).$$

Ввиду произвольного выбора F отсюда следует

$$\xi_F(t) = \xi_E(t) \qquad \forall t \in E, \forall F \in \mathtt{A}, E \subset F. \tag{22}$$

По определению топология τ_Z задает поточечную сходимость элементов Z, то есть для всякой предельной точки ξ направленности $\{\xi_B\}_{B\in\mathtt{A}}$ в (Z, τ_Z) и любого $t \in T$ значение $\xi(t)$ определяется как предельная точка направленности $\{\xi_B(t)\}_{B\in\mathtt{A}}$ в (X, τ_X). Тогда из (15), (22) и хаусдорфовости топологии τ_X следует, что для всякой предельной точки ξ направленности $\{\xi_B\}_{B\in\mathtt{A}}$ выполняется

$$\xi(t) = \xi_E(t) \qquad \forall t \in E, \tag{23}$$

в частности, для $\hat{\xi}$ из (23) получим

$$(\hat{\xi} \,|\, E) = (\xi_E \,|\, E). \tag{24}$$

Из (16), (17), (20) и $\zeta_1, \omega_E \in \hat{H}$ имеем

$$(\hat{\beta}(\zeta_1) \,|\, E) = (\beta(\zeta_1) \,|\, E) = (\beta(\omega_E) \,|\, E). \tag{25}$$

Тогда из (25), (14), (24), (14) и (19) получаем, соответственно, равенства

$$(\hat{\beta}(\zeta_1) \,|\, E) = (\beta(\omega_E) \,|\, E) = (\xi_E \,|\, E) = (\hat{\xi} \,|\, E) = (\hat{\beta}(\hat{\omega}) \,|\, E) = (\hat{\beta}(\zeta_2) \,|\, E). \tag{26}$$

Итак (см. (18), (26)), имеем импликацию

$$((\zeta_1 \,|\, E) = (\zeta_2 \,|\, E)) \Rightarrow ((\hat{\beta}(\zeta_1) \,|\, E) = (\hat{\beta}(\zeta_2) \,|\, E)).$$

Так как множество E и элементы ζ_1, ζ_2 выбирались произвольно, установлено включение (13). И, значит, $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\} \in \mathcal{H}_\alpha$.

Мы показали, что предположение $\hat{H} \neq \Omega$ влечет противоречие с максимальностью $\hat{H}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \subset)$, то есть имеет место другая альтернатива: $\hat{H} = \Omega$. Значит, $\Omega \in \mathcal{H}_\alpha$, иными словами, $\mathbf{n}^0_\Omega[\alpha] \neq \varnothing$. Компактность множества $\mathbf{n}^0_\Omega[\alpha]$ в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$ сразу следует из леммы 1. Доказательство завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Roxin E.* Axiomatic approach in differential games // Journal of Optimization Theory and Applications. 1969. Vol. 3. № 3. P. 153-163.

2. *Ryll-Nardzewski C.* A theory of pursuit and evasion // Advances in Game Theory. Princeton: Princeton University Press, 1964. 691 p.

3. *Varaiya P., Lin J.* Existence of saddle points in differential games // SIAM Journal on Control. 1969. Vol. 7. № 1. P. 141-157.

4. *Elliott R.J., Kalton N.J.* The existence of value in differential games of pursuit and evasion // Journal of Differential Equations. 1972. Vol. 12. № 3. P. 504-523.

5. *Ченцов А.Г.* Об игровой задаче на минимакс функционала // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 230. № 5. С. 1047-1050.

6. *Ченцов А.Г.* Селекторы многозначных квазистратегий в дифференциальных играх. Свердловск, 1978. 22 с. Деп. в ВИНИТИ, № 3101-78.

7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Серков Дмитрий Александрович, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела динамических систем; Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, профессор кафедры вычислительных методов и уравнений математической физики, e-mail: serkov@imm.uran.ru

Ченцов Александр Георгиевич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела управляемых систем; Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, профессор кафедры вычислительных методов и уравнений математической физики, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Для цитирования: *Серков Д.А., Ченцов А.Г.* О существовании неупреждающего селектора неупреждающего многозначного отображения // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 717–725. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-717-725

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-717-725

ON THE EXISTENCE OF A NON-ANTICIPATING SELECTION OF NON-ANTICIPATING MULTIVALUED MAPPING

D. A. Serkov[1,2], **A. G. Chentsov**[1,2]

[1] Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch, Russian Academy of Sciences,
16, S. Kovalevskoy St., Yekaterinburg 620219, Russian Federaton
[2] Ural Federal University named after B.N. Eltsin,
19, Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: serkov@imm.uran.ru, chentsov@imm.uran.ru

Abstract. The existence of a non-anticipating selection of a non-anticipating multifunction is considered. For the case ordinary used in applications, it is shown that every non-anticipating multifunction with non-empty compact values has a non-anticipating selection.
Keywords: non-anticipating multifunction; non-anticipating selection

REFERENCES

1. Roxin E. Axiomatic approach in differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1969, vol. 3, no. 3, pp. 153-163.
2. Ryll-Nardzewski C. A theory of pursuit and evasion. *Advances in Game Theory.* Princeton, Princeton University Press, 1964, 691 p.
3. Varaiya P., Lin J. Existence of saddle points in differential games. *SIAM Journal on Control*, 1969, vol. 7, no. 1, pp. 141-157.
4. Elliott R.J., Kalton N.J. The existence of value in differential games of pursuit and evasion. *Journal of Differential Equations*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 504-523.
5. Chentsov A.G. Ob igrovoy zadache na minimaks funktsionala [On the game problem on minimax of a functional]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1976, vol. 230, no. 5, pp. 1047-1050. (In Russian).
6. Chentsov A.G. *Selektory mnogoznachnykh kvazistrategiy v differentsial'nykh igrakh* [Selections of Multivalued Strategies in Differential Games]. Sverdlovsk, 1978, 22 p. (In Russian).
7. Engelking R. *General Topology.* Warszawa, PWN, 1985, 752 p.

Received 18 Aprl 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 26 June 2018
There is no conflict of interests.

The work is supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00410).

Serkov Dmitrii Aleksandrovich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federtion, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, ; Institute of Radioelectronics and Information Technologies of Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Professor, e-mail: serkov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksandr Georgievich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of RAS, Chief Researcher; Institute of Radioelectronics and Information Technologies of Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Professor, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

For citation: Serkov D.A., Chentsov A.G. O sushchestvovanii neuprezhdayushchego selektora neuprezhdayushchego mnogoznachnogo otobrazheniya [On the existence of a non-anticipating selection of non-anticipating multivalued mapping]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 717–725. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-717-725 (In Russian, Abstr. in Engl.).